FREGE: LA PARADOJA DE RUSSELL

Agustín Arrieta Urtizberea - ylparura@sf.ehu.es

Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia - www.ehu.es/logika

1. La paradoja en términos no-fregeanos

Bucéfalo pertenece al conjunto de los caballos (CABALLOS), por ser un caballo

El conjunto de los caballos no pertenece al conjunto de los caballos, ya que el conjunto de los caballos no es un caballo

Así pues, 'bucéfalo ∈ CABALLOS', pero 'CABALLOS ∉ CABALLOS'

Consideremos el conjunto que tiene como elementos a los conjuntos con más de siete elementos: MÁS-SIETE

El conjunto de los filósofos (FILÓSOFOS) es un elemento de MÁS-SIETE. En cambio, el conjunto formado por los hermanos Marx (MARX) no pertenece a MÁS-SIETE.

Así pues, 'FILÓSOFOS ∈ MÁS-SIETE', pero 'MARX ∉ MÁS-SIETE''.

Nos podemos preguntar si MÁS-SIETE es un elemento de MÁS-SIETE. La respuesta parece ser afirmativa, ya que el conjunto MÁS-SIETE tiene más de siete elementos, por lo que es un elemento de MÁS-SIETE.

Es decir, 'MÁS-SIETE ∈ MÁS-SIETE'

Sea RUSSELL el siguiente conjunto: los elementos de RUSSELL son conjuntos que tienen la propiedad de no ser elementos de sí mismos.

Por ejemplo, hemos visto que el conjunto CABALLOS tiene la siguiente propiedad: CABALLOS ∉ CABALLOS. Por lo tanto, CABALLOS ∈ RUSSELL.

Ahora nos preguntamos: ¿RUSSELL∈ RUSSELL?

Supongamos que sí. Si RUSSELL es un elemento de RUSSELL, entonces, por la definición de RUSSELL, establecemos que RUSSELL no es un elemento de RUSSELL.

Supongamos que no. Si RUSSELL no pertenece a RUSSELL, entonces RUSSELL cumple la condición para ser elemento de RUSSELL. Por lo tanto, RUSSELL pertenece a RUSSELL

Por lo que llegamos a la siguiente paradoja:

RUSSELL$\in$ RUSSELL si y sólo si RUSSELL $\notin$ RUSSELL

El problema es que, en principio, no hay nada que impida construir conjuntos como RUSSELL.

2. La paradoja en términos fregeanos

Sea ‘F( )’ una expresión conceptual.

‘F(a)’ dice que el objeto *a* cae bajo el concepto *F( )*, es decir, dice que *a* es *F*.

Mediante ‘[F]’ nos referimos a la extensión del concepto *F( )*. Es decir, [F] es el conjunto de objetos que caen bajo el concepto *F( )* o que son *F( ).*

En la filosofía fregeana hay dos principio que se asumen verdaderos:

(P1) Dada una expresión conceptual ‘F( )’, se cumple: para todo x, o F(x) es verdadero o no-F(x) es verdadero (no hay expresiones conceptuales *vagas*. Una expresión conceptual es vaga, si existe un x para el que ni F(x) es verdadero ni no-F(x) es verdadero)

(P2) Las extensiones de los conceptos son objetos (los conjuntos son objetos)

Además Frege plantea un axioma (El famoso axioma V de los *Grundgesetze*) que proporciona un criterio de identidad para las extensiones, es decir, este axioma nos da condiciones necesarias y suficientes para establecer cuándo estamos ante la misma extensión:

(AX.5) [F]=[G] si y sólo si $\forall x\ (Fx \Leftrightarrow Gx)$

Por ejemplo, como es verdad que $\forall x$ *(Tiene-riñones(x)* $\Leftrightarrow$ *Tiene-corazón(x))*, entonces *el conjunto de los seres con riñones* es el mismo que *el conjunto de los seres con corazón*.

Sobre la base de (P1), (P2) y (AX.5) se plantea la siguiente paradoja.

Sea la expresión conceptual 'R( )' definida de la siguiente forma:

R(x) si y sólo si existe un concepto *H ( )* tal que x=[H] y no-H(x).

'R( )' se puede definir equivalentemente de la siguiente forma:

R(x) si y sólo si existe un concepto H( ) tal que x es la extensión de ese concepto, a la vez que x no es un H( ).

Es decir, 'R( )' es la siguiente expresión conceptual: '( ) es la extensión de algún concepto bajo el que no cae'.

En definitiva, [R] es un conjunto de conjuntos, donde cada conjunto en [R] es la extensión de algún concepto *H( ),* con la condición de que dicha extensión no sea un H.

Por ejemplo, la extensión [caballo] (o conjunto de los caballos, es decir, CABALLOS) es uno de los elementos de [R], ya que [caballo] es la extensión del concepto *caballo( ),* y además [caballo] no es un caballo (el conjunto de los caballos no es un caballo)

La expresión conceptual 'R( )' está bien definida, es decir, respeta (P1). También se respeta (P2), ya que las extensiones de los conceptos se tratan como objetos. A pesar de ello, la expresión conceptual 'R( )' genera una paradoja.

Hagámonos la siguiente pregunta. ¿Es la extensión de R un R?, o equivalentemente, ¿es [R] un R?, o equivalentemente, ¿Es verdadero R([R])?

Supongamos que *es verdadero R([R])*. Eso quiere decir, según la definición de R( ), que existe un concepto *H( )* del cual [R] es la extensión tal que H([R]) es falso. Es decir, [R]=[H] y H([R]) es falso. Por el axioma (V), obtenemos que *R([R]) es falso*.

Supongamos que *es falso R([R])*. Tenemos, por lo tanto, la siguiente situación: tenemos la extensión de un concepto (precisamente del concepto *R( )*) que no cae bajo dicho concepto (ya que *es falso R([R])*). Por lo tanto se satisfacen las condiciones para que sea verdadero *R([R]).*

En definitiva, suponiendo verdadero R([R]) hemos obtenido que es falso. Suponiendo falso R([R]) hemos obtenido que es verdadero. Es decir, la pregunta arriba señalada no tiene respuesta.

UNA BREVE VALORACIÓN

Estamos ante una situación paradójica que se ha derivado de la definición de la expresión conceptual ‘R( )’ y del uso que hemos hecho del axioma V. El axioma lo hemos usado en el siguiente sentido:

(AX.5 débil) si [F]=[G], entonces $\forall x\ (Fx \Leftrightarrow Gx)$

Con lo cual la fuente de la que emerge el problema está en (AX.5 débil) o en las condiciones que permiten la definición de la expresión conceptual ‘R( )’. Es decir, en los principios (P1) y (P2).

Negar el principio (P2) sería negar que las extensiones de los conceptos sean objetos. ¿Qué significa negar ese principio? Significaría, por ejemplo, negar que objetos como Sócrates, Platón, Frege y Wittgenstein,... estén al mismo nivel que el objeto-conjunto de los filósofos: { Sócrates, Platón, Frege y Wittgenstein,... }. Por ejemplo, podríamos decir que los conjuntos son *objetos especiales* y podríamos imponer restricciones como la siguiente: no deben mezclarse objetos con *objetos especiales* en un mismo conjunto. Por este camino, nos acercaríamos a la *teoría de los tipos* propuesta por Russell. La paradoja se evitaría si no permitimos que la extensión del concepto R( ) (que es un conjunto de objetos que son R) sea un elemento de sí mismo. La paradoja se evitaría, ya que no permitiríamos preguntas como: ¿es [R] un elemento de [R]? O ¿es [R] un R? En la medida en la cual estas preguntas pierden sentido, nos encontramos con que el principio P(2) se tambalea, ya que no sería verdadero que, dada una expresión conceptual F( ), para todo objeto x, la pregunta '¿es x un F( )?' tenga siempre sentido.

Así pues, una salida a la paradoja podría pasar por la puesta en duda de los principios (P1) y P(2).

¿Qué ocurre con (AX.5 débil)?

(AX.5 débil) si [F]=[G], entonces $\forall$x (Fx $\Leftrightarrow$ Gx)

Parece claro que este axioma es falso. Es decir, cabe que dos conceptos tengan la misma extensión, sin que bajo dichos conceptos caigan los mismos objetos. Hemos visto en el caso del concepto paradójico R( ), que se daban las siguientes circunstancias: Teníamos dos conceptos R( ) y H( ), tales que [R]=[H] y tal que R([R]) es verdadero, mientras que H([R]) es falso. Con lo cual, antes de aplicar el axioma estamos suponiendo que dicho axioma es falso. Una situación problemática.

Cabe transformar (AX.5 débil) de la siguiente forma:

(AX.5 débil*)

si [F]=[G], entonces $\forall$x que no sea la extensión ni de F ni de G (Fx $\Leftrightarrow$ Gx)

Este nuevo axioma, que tiene visos de ser verdadero, no satisface a Frege, ya que el axioma V pretende ser un criterio de identidad para las extensiones, y al introducir una restricción que hace referencia a extensiones, estaríamos haciendo algo ilegítimo, desde el punto de vista de los criterios de identidad.

Además, aunque introdujéramos ese principio, seguiría habiendo un problema de fondo grave. Frege no pone ninguna restricción en el mundo de los objetos. Es más las extensiones de los conceptos son objetos. Con lo cual es perfectamente concebible *el conjunto de todos los objetos* fregeanos: TODO. El problema es que este TODO nos lleva a otra paradoja que no pasa por el axioma V. Basta pensar en el conjunto de todos los subconjuntos de TODO: SUB(TODO). Cabe demostrar que SUB(TODO) tiene mayor número de elementos (que son conjuntos y, por lo tanto, objetos) que el conjunto TODO o conjunto de todos los objetos. Lo cual nos lleva a otra contradicción. ¿Cómo puede haber un conjunto con más objetos que el conjunto de todos los objetos?

(En realidad cabe reformular la parádoja de arriba, de tal forma que el axioma V se tambalea: Sea la expresión conceptual: ‘( ) es un A’. Sea la expresión conceptual: ‘( ) es un subconjunto de [A]’. Cantor demostró que la extensión del segundo concepto tiene más elementos que la extensión del primer concepto, se cual sea A. Es decir, para algún caso *a*, se cumple que *a* es un subconjunto de [A] y que *a* no es un A. Es decir, [A] es distinto de [subconjunto de A].

Pongamos en lugar de A ‘conjunto’. Parece que el axioma V se tambalea.)

Bibliografía

Beaney, M. (1996), *Frege. Making Sense*. Duckworth.

Sainsbury, R.M. (1995), *Paradoxes*. Cambridge University Press, segunda edición.